ΛΥΣΕΙΣ

ΣΤΟ

1ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

05/04/2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Ορισμός,σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία απόδειξη,σχολικό βιβλίο

Α3. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

Α4. α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Έστω συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -x-1, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}.$$

- Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-1 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$
- Ωστόσο, η συνάρτηση $(f+g)(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.Έχουμε:

$$t_1=\frac{(KM)}{u_1}=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2=\frac{(M\Sigma)}{u_2}=\frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5},\ x\in(0,300)$$

Είναι:

$$T'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\frac{1}{5}$$

Η ρίζα της $T(x)=0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	**0** **75**	**300**
$T'(x)$	$-$	$+$
$T(x)$	↘	↗

Δηλαδή η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=75\,ft$

Άρα όταν, $x=75\,ft$ τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με :

$$f'(x)=3x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Άρα αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1" και επομένως η f αντιστρέφεται.Το σύνολο τιμών της είναι το (A,B), όπου:

$$A=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ B=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \text{δηλαδή το}\ \mathbb{R}.$$

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το -1. Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow\ f(f(x))=x$$

Έστω:

$$g(x)=f(f(x))-x\ \text{, τότε είναι}\ \ g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Παρατηρώ ότι:

$$g(-1)=f(f(-1))+1=f(-1)+1=-1+1=0$$

Άρα το -1 είναι ρίζα της g(x)

Η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x)=f'(f(x))f'(x)-1=\left(3(x^3+x+1)^2+1\right)(3x^2+1)-1=(9x^2+3)(x^3+x+1)^2+3x^2>0$$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1».

Επομένως το -1 είναι η μοναδική ρίζα της

$$g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1,\ f(-1))$ ή $A(-1,\ -1)$.

Εναλλακτικά

2ος τρόπος:

Έχουμε:

$f(-1) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = -1$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \ .$$

Έστω ότι η $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ επομένως και η $f(f(x)) = x$ έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 .

Θεωρώ τη συνάρτηση: $g(x) = f(f(x)) - x, \ x \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[\rho_1, \rho_2]$)
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (ρ_1, ρ_2)) με:

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) - 1 = \left(3f^2(x) + 1\right) \cdot (3x^2 + 1) - 1 = 9f^2(x) \cdot x^2 + 3f^2(x) + 3x^2 > 0$$

- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο αφού $g'(x) > 0$.

Άρα η $x = -1$ η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x) = f(x)$ και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1, f(-1))$ ή $A(-1, \ -1)$.

Γ3. α.

- Για $x = y$ ισχύει η ισότητα:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

- Για $x < y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x, y]$ και έχουμε:
  Η f είναι συνεχής στο $[x, y]$ (ως πολυωνυμική)
  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x, y) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x, y)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 1$ $(f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 + 1 \geq 1)$, δηλαδή:

$$f(y) - f(x) \geq y - x \ \text{ ή } \ |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \ \text{ διότι:}$$

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \geq y - x = |y - x| = |x - y| \quad (1)$$

- Για $x > y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[y, x]$ και έχουμε:
  Η f είναι συνεχής στο $[y, x]$ (ως πολυωνυμική)
  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (y, x) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (y, x)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 1$ $(f'(\xi_2) = 3\xi_2^2 + 1 \geq 1)$, δηλαδή:

$$f(x) - f(y) \geq x - y \ \text{ ή } \ |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \ \text{ διότι:}$$

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \geq x - y = |x - y| \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \ \text{ (Ι) για κάθε } \ x, y \in \mathbb{R}$$

Στην σχέση (Ι) θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και y το $f^{-1}(y)$, αφού η (Ι) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \ \text{ και τελικά:}$$

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$$

β. Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

Έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le \left|x-x_0\right| \Leftrightarrow -\left|x-x_0\right| \le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0) \le \left|x-x_0\right|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left|x-x_0\right| = \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\left|x-x_0\right|\right) = 0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε και

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right) = 0 \text{ ή } \lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$$

Γ4. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = -2\xi \Leftrightarrow \xi = f(-2\xi) \Leftrightarrow f(-2\xi)-\xi = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(-2x)-x,\ x\in\mathbb{R}$

Ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$).
- $g(0) = f(0)-0 = 1 > 0$
- $g(1) = f(-2)-1 = -9-1 = -10 < 0$

Από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$ ή ισοδύναμα $f^{-1}(\xi)+2\xi = 0$.
Επιπλέον η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (0, 1)) με:

$$g'(x) = -2f'(-2x)-1 = -2(12x^2+1)-1 = -24x^2-3 < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1», και επομένως το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $f(0)=1$ και $f(-1)=-1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει (και είναι μοναδικό) $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = x_1 \in (-1,0)$$

Ακόμα $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση:

$$h(x) = f^{-1}(x)+2x$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (άθροισμα συνεχών στο $[0,\ 1]$) και

$$h(0) = f^{-1}(0) = x_1 < 0 \ ,\quad h(1) = f^{-1}(1)+2 = 2 > 0$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)+2\xi = 0$$

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα διότι:

Αν $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$.Θα αποδείξουμε ότι: $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Έστω $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ με $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$. Άρα

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2) \quad (*)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η (*) έχουμε διαδοχικά:

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα:

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$

και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$f^{-1}(x_1)+2x_1 < f^{-1}(x_2)+2x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Το ξ είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)-\left[g(2-h)-g(2)\right]}{h}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{g(2-h)-g(2)}{h}\right]=0 \ (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2) \ (2) \ (2+h=x \text{ και g } \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2-h)-g(2)}{h}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2) \ (3) \ (2-h=x \text{ και g } \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow g'(2)-\left(-g'(2)\right)=0 \Leftrightarrow 2g'(2)=0 \Leftrightarrow g'(2)=0$$

Δ2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^2+x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+x+2)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Δ3. Έχουμε:

$$f'(x)=e^x(x^2+x+2)>0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R} \quad \text{με:}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2+x+2)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0,+\infty)$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

Δ4. Το σημείο $\mathrm{B}(x, f(x))$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$:

$$(\mathrm{AB})=d(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(f(x)-0\right)^2}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{f(x)}\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$d'(x)=\frac{2(x-2)+f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}=\frac{2(x-2)+e^x(x^2+x+2)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x)=2(x-2)+e^x(x^2+x+2)$ ως προς το πρόσημό της.

Η εξίσωση $t(x)=0$ έχει προφανής λύσης την $x=0$ και:

$$t'(x)=2+e^x(x^2+5x+7)>0\ (e^x>0,\ x^2+5x+7>0)$$

Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d'=t$	$-\infty \nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow +\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	$\searrow$		$\nearrow$

$\min d(0)=\sqrt{7}$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}\left(0,h(0)\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι:

$\lambda_\varepsilon=h'(0)=\dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{0-\sqrt{3}}{2-0}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και άρα: $\lambda_{\mathrm{AB}}\cdot\lambda_\varepsilon=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=-1$

Επομένως: $(\varepsilon)\perp \mathrm{AB}$

Επιστημονική ευθύνη: Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου ΠΕ03,

2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου