



**ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο (έκδοση 2018) σελ. 76

A2. α. Ψ

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 134 ΣΧΟΛΙΟ): Πχ. για την
συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε

$x \in A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο A

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 123

A4. α. Λάθος (σελ 214)

β. Λάθος (σελ 165)

γ. Σωστό (σελ. 212)

δ. Σωστό (σελ. 77)

ε. Σωστό (σελ 157)

ΘΕΜΑ Β

B1.

Ισχύει $f(x) = xe^{-x} - 1 \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$, άρα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		+	-
f		↗ max $e^{-1} - 1$	↘

$f''(x) = (e^{-x}(1-x))' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(1-x+1) = e^{-x}(x-2)$, άρα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''		-	+
f		∩ Σ.Κ. $2e^{-2} - 1$	∪

B2.

Επειδή f συνεχής στο \mathbb{R} , η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - 1) = -1 \quad \text{διότι} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\infty}{\text{D/L}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Άρα η $y = -1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Είναι $f(0) = -1$ άρα $(0, -1) \in C_f$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - e^x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = e^x$

αδύνατη διότι $e^x \geq x + 1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η C_f δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$

B3.

Αφού η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx$$

και απ' το ερώτημα **B1** έχουμε $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$$\begin{aligned} \text{άρα } E &= \int_0^1 -f(x) dx = \int_1^0 (xe^{-x} - 1) dx = \int_1^0 xe^{-x} dx - \int_1^0 1 dx = \int_0^1 x(e^{-x})' dx - \int_1^0 x' dx \\ &= \left[xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx - \left[x \right]_1^0 = e^{-1} + \left[e^{-x} \right]_0^1 + 1 = 2e^{-1} \quad \text{τ.μ.} \end{aligned}$$

B4.

Επειδή $g(x)=f(x)+1$ η C_g προκύπτει απ' την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα προς τα πάνω. Άρα και η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f θα μετατοπιστεί και αυτή 1 μονάδα προς τα πάνω, δηλ. η C_g θα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την οριζόντια ευθεία $y=-1+1=0$, δηλ. τον οριζόντιο άξονα $x'x$

Σημείωση: Πιο αυστηρά αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 1 = -1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Ο πίνακας μεταβολών της g προκύπτει από αυτόν της f διότι οι θέσεις ακροτάτων και σημείων καμπής δεν επηρεάζονται από κατακόρυφες μετατοπίσεις γραφημάτων.

Σημείωση: Πιο αυστηρά αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

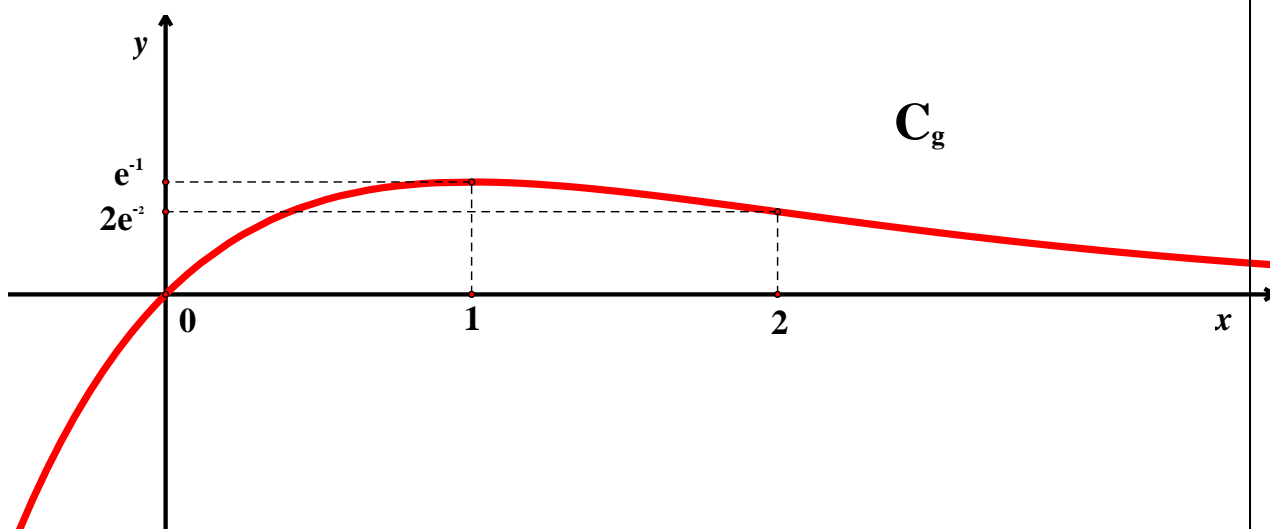
Έστω x_0 θέση μεγίστου της συνάρτησης $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε $\forall x \in A$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x)+1 \leq f(x_0)+1 \Leftrightarrow g(x) \leq g(x_0)$ και παρόμοια απόδειξη για τα σημεία καμπής.

Τέλος, είναι $g(0)=f(0)+1=-1+1=0$ άρα $(0, 0) \in C_g$

Συμβουλή! Καλό είναι να τοποθετούμε τον αριθμό 0 στον πίνακα μεταβολών (άσχετα αν δεν υπήρχε προηγουμένως) και σε μια νοητή κατακόρυφη γραμμή κάτω απ' το 0 να σχεδιάζουμε τον κατακόρυφο άξονα των τεταγμένων y

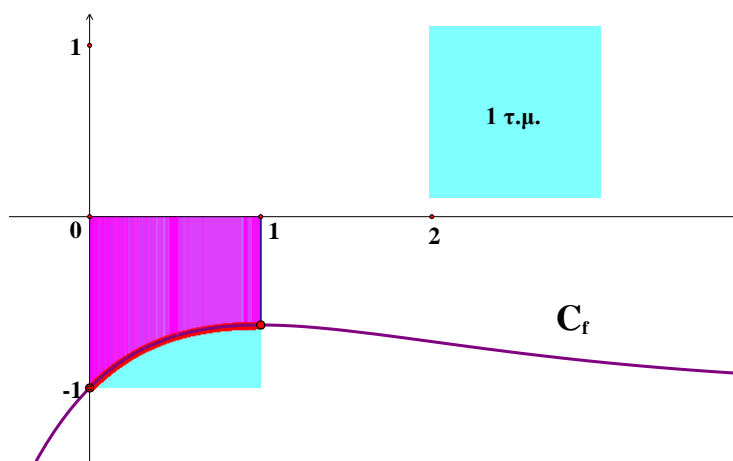
Έτσι, διευκολύνεται η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$\sigma_{\alpha'}$		+	○	-	-	
$\sigma_{\alpha''}$		-		○	+	
σ_{α}		↖	max $e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1}$	↖	Σ.Κ. $2e^{-2} - 1 + 1 = 2e^{-2}$	↖



Σημείωση: Είχαμε βρει στο εμβαδόν του ερωτήματος **B3**. αποτέλεσμα $E=2e^{-1}$ τμ. και $2e^{-1} = \frac{2}{e} \cong \frac{2}{2,718} < 1$

Αυτό σημαίνει ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι κάτι λιγότερο από μια τετραγωνική μονάδα των αξόνων, όπως βλέπουμε και παρακάτω:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

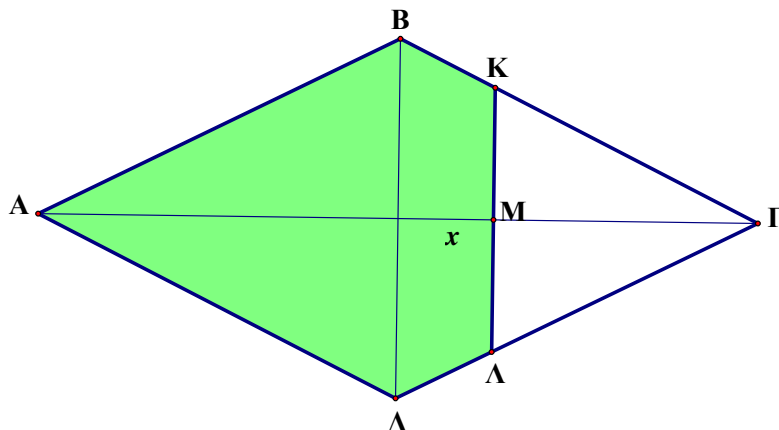
- Αν $0 < x \leq 1$ τότε $f(x) = (AK\Lambda) = \frac{x(K\Lambda)}{2}$

1^{ος} τρόπος: Απ' την ομοιότητα των τριγώνων $AK\Lambda$ και $AB\Delta$ έχουμε $(K\Lambda):(B\Delta) = x:(A\Gamma/2) \Leftrightarrow (K\Lambda):1 = x:1 \Leftrightarrow (K\Lambda) = x$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } \varepsilon\phi\hat{K}AM = \frac{(KM)}{x} = \frac{(B\Delta):2}{(A\Gamma):2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2(KM) = (K\Lambda)$$

$$\text{Άρα, } f(x) = \frac{x^2}{2}$$

- Αν $1 < x \leq 2$ τότε έχουμε το παρακάτω σχήμα:



$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } f(x) = (AB\Delta) + (BK\Lambda\Delta) = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 + (K\Lambda)}{2} \cdot (x - 1)$$

(1)

Απ' την ομοιότητα των τριγώνων $K\Gamma\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουμε $(K\Lambda):(B\Delta) = (2-x):(A\Gamma/2) \Leftrightarrow (K\Lambda):1 = (2-x):1 \Leftrightarrow (K\Lambda) = 2-x$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 + 2 - x}{2} \cdot (x - 1) = \frac{1 + 3(x - 1) - x(x - 1)}{2} \stackrel{\text{πράξεις}}{=} 1 - \frac{(2 - x)^2}{2}$$

2^{ος} τρόπος:

$$f(x) = (AB\Gamma\Delta) - (K\Gamma\Lambda) = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{(K\Lambda) \cdot (2 - x)}{2} \stackrel{\text{συμμετρία}}{=} 1 - \frac{(2 - x)^2}{2}$$

Γ2. Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \sigma\upsilon\nu x - 1 + x}{f(x) + \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \sigma\upsilon\nu x - 1 + x}{\frac{1}{2}x^2 + \eta\mu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + 1}{\frac{1}{2}x + \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 + 1}{0 + 1} = 1\end{aligned}$$

Γ3.

Η f παριστάνει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, το οποίο συνεχώς αυξάνεται, καθώς το M διατρέχει τη διαγώνιο απ' το A στο Γ

Επομένως $f \uparrow (0, 2]$ άρα 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Σημείωση: Πιο αυστηρά, η μονοτονία της f δείχνεται ως εξής:

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$

Στο σημείο αλλαγής του τύπου έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

άρα f συνεχής.

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} x > 0 & \text{για κάθε } 0 < x < 1 \\ -(x-2) > 0 & \text{για κάθε } 1 < x < 2 \end{cases}$$

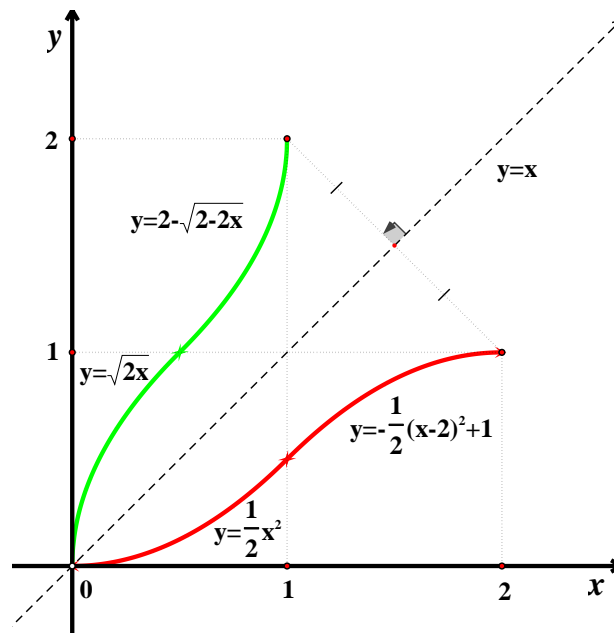
Άρα $f \uparrow$ σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα $(0, 1]$ και $[1, 2]$ και επειδή είναι συνεχής στο 1 έπεται ότι $f \uparrow (0, 2]$

Η C_f αποτελείται από δύο παραβολικά τμήματα, άρα μπορούμε να τα σχεδιάσουμε χωρίς μελέτη. Αλλιώς, με μελέτη έχουμε:

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{για κάθε } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{για κάθε } 1 < x < 2 \end{cases} \quad \text{και αφού } f \text{ συνεχής στο } 1, \text{ η } f$$

είναι κυρτή στο διάστημα $(0, 1]$ και κοίλη στο διάστημα $[1, 2]$. Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $f(1) = 1/2$ και $f(2) = 1$

Επειδή, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ έχουμε:



Σημείωση: Ο τύπος της αντίστροφης (αν και δεν χρειάζεται) βρίσκεται ως εξής:

- Αν $0 < x \leq 1$ τότε $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2y} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2y}$

με $0 < \sqrt{2y} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2y \leq 1 \Leftrightarrow 0 < y \leq \frac{1}{2}$

- Αν $1 < x \leq 2$ τότε

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 2-2y$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{2-2y} \stackrel{x \leq 2}{\Leftrightarrow} 2-x = \sqrt{2-2y} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2-2y}$$

με

$$1 < 2 - \sqrt{2-2y} \leq 2 \Leftrightarrow -1 < -\sqrt{2-2y} \leq 0 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{2-2y} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > 2-2y \geq 0 \Leftrightarrow -1 > -2y \geq -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < y \leq 1$$

Άρα,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & , & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2-2x} & , & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Γ4.

1^{ος} τρόπος:

$$\ln^2 x + (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln^2 x = -\frac{1}{2} (x-2)^2 + 1 \quad (1)$$

Είναι $1 < x < 2 \stackrel{\ln \uparrow}{\Rightarrow} \ln 1 < \ln x < \ln 2 < \ln e = 1$ επομένως $0 < \ln x < 1$

Άρα η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(\ln x) = f(x) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} \ln x = x \quad (2)$

Για κάθε $x > 1$ ισχύει $\ln x < x - 1$ και έτσι αν έχει λύση η (2) θα πρέπει $x < x - 1 \Leftrightarrow 0 < -1$ άτοπο, άρα η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα $(1, 2)$

2^{ος} τρόπος:

$\ln^2 x + (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow \ln^2 x = 2 - (x-2)^2 = 2 - x^2 + 4x - 4 = -x^2 + 4x - 2 \geq 0$
για κάθε $x \in (1, 2)$ (πρόσημο τριωνύμου) και παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες:

$$\sqrt{\ln^2 x} = \sqrt{-x^2 + 4x - 2} \Leftrightarrow |\ln x| = \sqrt{-x^2 + 4x - 2} \stackrel{\ln x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x = \sqrt{-x^2 + 4x - 2} \quad x > 1$$

Για κάθε $x > 1$ ισχύει $\ln x < x - 1$ άρα

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 2} < x - 1 \stackrel{x-1 > 0}{\Leftrightarrow} -x^2 + 4x - 2 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 > 0$$

άτοπο διότι το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 3$ γίνεται αρνητικό για κάθε $x \in (1, 2)$ (πρόσημο τριωνύμου).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $f'(x) = \frac{\alpha}{x} - 2(x-2)$ και αφού παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, θα έχουμε απ' το Θ. Fermat ότι $f'(x_0) = 0$ άρα

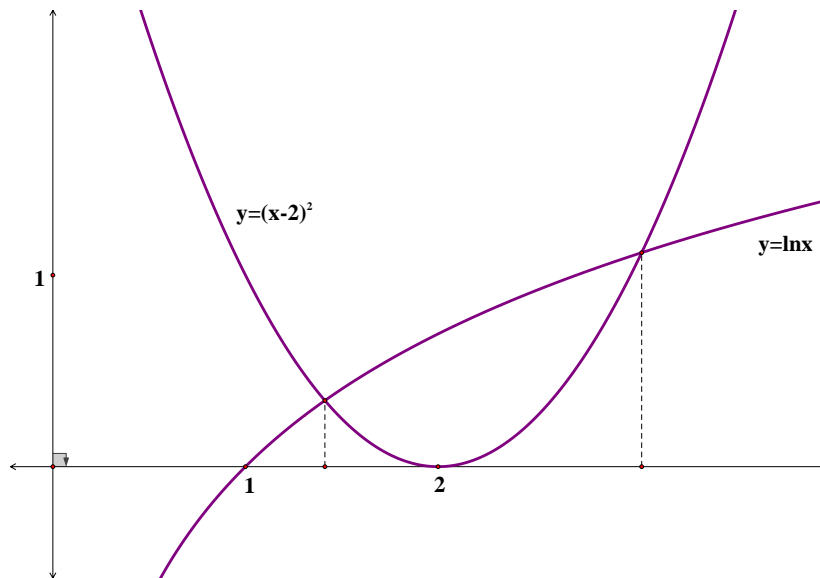
$$0 = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}} - 2 \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 \right) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}} = 2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) = 2 \left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 - 1^2 \right] = 2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 1$$

Έτσι, $f(x) = \ln x - (x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 2(x-2) \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2} - 2 < 0$
για κάθε $x > 0$ άρα $f' \downarrow$ και f κοίλη στο Δ

Δ2.

1^{ος} τρόπος (με Bolzano και Rolle): $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = (x-2)^2$



Παρατηρούμε ότι:

- $f(1) = \ln 1 - (1-2)^2 = -1 < 0$, $f(2) = \ln 2 - (2-2)^2 = \ln 2 > 0$ και επειδή f συνεχής στο $[1, 2]$ έπεται απ' το θ. Bolzano ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$
- $f(4) = \ln 4 - (4-2)^2 = \ln 4 - 4 < 0$ διότι $4 < e^4$ και επειδή f συνεχής στο $[2, 4]$ έπεται απ' το θ. Bolzano ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 4)$

Άρα η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες. Υποθέτουμε ότι η f έχει 3 τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ ικανοποιεί το θ. Rolle άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες· άτοπο διότι $f' \downarrow$
Άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Σχόλιο: Η δυσκολία του ερωτήματος Δ2 είναι η εύρεση των διαστημάτων που ανήκουν οι ρίζες αλλά αυτό πετυχαίνεται απ' την γραφική επίλυση της $f(x)=0$ ισοδύναμα της εξίσωσης $\ln x = (x-2)^2$ αλλιώς καταφεύγουμε σε άλλο τρόπο όπως πχ. με το σύνολο τιμών, που ακολουθεί στη συνέχεια.

$2^{\circ\varsigma}$ τρόπος (με σύνολο τιμών): Είναι $\Delta=(0,x_0]\cup[x_0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{-Έστω } 0 < x < x_0 &\stackrel{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \uparrow (0, x_0] \\ &\Rightarrow f((0, x_0]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(x_0) \right) = (-\infty, f(x_0)] \end{aligned}$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - (x-2)^2) = -\infty - \infty = -\infty$

$$\begin{aligned} \text{-Έστω } x > x_0 &\stackrel{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \downarrow [x_0, +\infty) \\ &\Rightarrow f([x_0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(x_0) \right) = (-\infty, f(x_0)] \end{aligned}$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - (x-2)^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x \left(1 - \frac{(x-2)^2}{\ln x} \right) \right) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2}{\ln x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-2)}{\frac{1}{x}} \stackrel{DL}{=} 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-2) = 2(+\infty) = +\infty$$

Επειδή $f \uparrow (0, x_0]$ και $f \downarrow [x_0, +\infty)$ αν δείξω ότι $0 \in (-\infty, f(x_0)) \Leftrightarrow f(x_0) > 0$ τότε σε κάθε ένα απ' τα υποδιαστήματα $(0, x_0], [x_0, +\infty)$ του Δ η f θα' χει από μια ακριβώς ρίζα και άρα το ζητούμενο.

$$f(x_0) = \ln \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 \right)^2 \stackrel{\text{πράξεις}}{=} \ln(2 + \sqrt{6}) - \ln 2 + \sqrt{6} - \frac{5}{2}$$

Για την συνάρτηση $h(x) = \ln x$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[2, 2 + \sqrt{6}]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2, 2 + \sqrt{6})$:

$$h'(\xi) = \frac{h(2 + \sqrt{6}) - h(2)}{2 + \sqrt{6} - 2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(2 + \sqrt{6}) - \ln 2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \ln(2 + \sqrt{6}) - \ln 2 = \frac{\sqrt{6}}{\xi} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } 2 < \xi < 2 + \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{2 + \sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{6}}{\xi} > \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \ln(2 + \sqrt{6}) - \ln 2 > \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} \Rightarrow f(x_0) > \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} + \sqrt{6} - \frac{5}{2} > 0$$

$$\text{διότι } \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} + \sqrt{6} - \frac{5}{2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}(2 + \sqrt{6}) - 5(2 + \sqrt{6}) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 12 - 10 - 5\sqrt{6} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} + 2 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

Δ3.

1^{ος} τρόπος: Αφού f κοίλη η C_f είναι κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός απ' το σημείο επαφής, άρα για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) - 1 = 3x - 4$

2^{ος} τρόπος: Έστω η συνάρτηση διαφοράς $g(x) = f(x) - 3x + 4$, $x > 0$

$$\text{τότε } g'(x) = f'(x) - 3 = \frac{1}{x} - 2(x-2) - 3 = \frac{1}{x} - 2x + 1 \stackrel{\text{πράξεις}}{=} \frac{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)}{x}$$

Επομένως:

x	$-\infty$	$-1/2$	0	1	$+\infty$
g'		-	o	+	
g				↗	↘

Παρατηρούμε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο 1 άρα ισχύει $g(x) \leq g(1) = f(1) - 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 3x - 4$ για κάθε $x \in \Delta$

Δ4.

Από το **Δ3.** και απ' την ανισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι για κάθε $x \in [1, 2]$ ισχύουν:

$$f(x) \leq 3x - 4 \quad (1)$$

$$\eta\mu x < x \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε $f(x)\eta\mu x \leq (3x-4)x$ και επειδή οι συναρτήσεις $f(x)\eta\mu x$ και $3x^2 - 4x$ δεν είναι ίσες στο $[1, 2]$ έχουμε:

$$\int_1^2 f(x)\eta\mu x dx < \int_1^2 (3x^2 - 4x) dx = [x^3 - 2x^2]_1^2 = (8-8) - (1-2) = 1$$

Σχόλιο: Δύο συμπληρωματικά ερωτήματα που προέκυψαν απ' την κατασκευή του Δ θέματος είναι τα εξής:

Δ5 Αν $g(x)=\eta\mu x$, $x \in (0, \pi)$ να προσδιορίσετε τη σύνθεση $f \circ g$ και έπειτα τη σχετική θέση των C_g και $C_{f \circ g}$ στο διάστημα $(0, \pi)$

Λύση:

Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in (0, \pi) : \eta\mu x > 0\} = (0, \pi)$ και $f(g(x)) = \ln(\eta\mu x) - (\eta\mu x - 2)^2 \leq \eta\mu x - 1 - (\eta\mu x - 2)^2 < \eta\mu x = g(x)$ άρα η $C_{f \circ g}$ βρίσκεται κάτω απ' την C_g

Δ6. Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha + \beta$ τότε $\alpha\beta \leq 1$
Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση:

1^{ος} τρόπος (με ανάλυση): Από το **Δ3**. για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq 3x - 4 \Leftrightarrow \ln x - (x - 2)^2 \leq 3x - 4 \Leftrightarrow \ln x \leq (x - 2)^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow \ln x \leq x^2 - x$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

Θέτοντας στην σχέση (1) όπου x τους αριθμούς α και β και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$\ln \alpha + \ln \beta \leq \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta = 0 \Rightarrow \ln \alpha\beta \leq \ln 1 \Rightarrow \alpha\beta \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = 1$

2^{ος} τρόπος (με άλγεβρα): Ισχύει $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$ με την ισότητα μόνο αν $\alpha = \beta$ και επειδή $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha + \beta$ έχουμε

$$(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha + \beta) \stackrel{:(\alpha + \beta) > 0}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta \leq 2 \quad (1)$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ (2)

Από (1) και (2) λαμβάνουμε $2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta \leq 2$ άρα $\sqrt{\alpha\beta} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = 1$

Κατασκευή των θεμάτων και επιμέλεια των λύσεων:
Χρήστος Ε. Ηρακλείδης