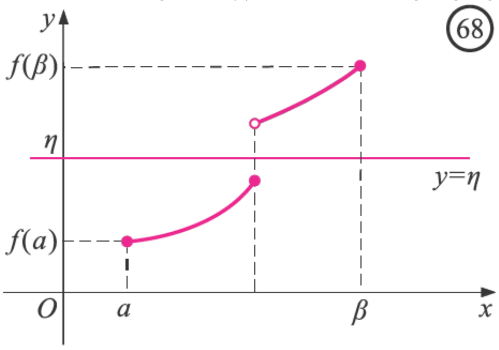
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

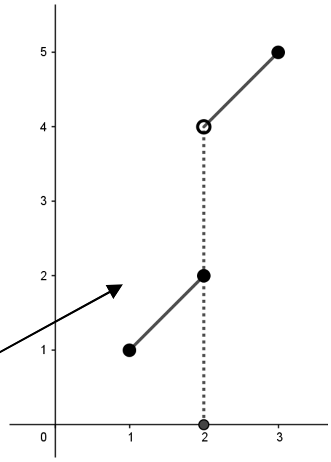
Α1. Θεωρία από το βιβλίο σελ. 142, 143 (Θεώρημα Fermat)

Α2. **α.** Ψ

β. Για να ισχύει ο ισχυρισμός θα πρέπει η f να είναι επιπλέον και συνεχής στο [α,β]. Θεωρούμε τα εξής αντιπαραδείγματα :
Αντιπαράδειγμα 1. Το σχήμα 68 της σελίδας 76 του βιβλίου
Αντιπαράδειγμα 2. Η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος.



$$f(x)=\begin{cases} x\ \ \ , & \text{αν } x\in[1,2] \\ x+2, & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$$

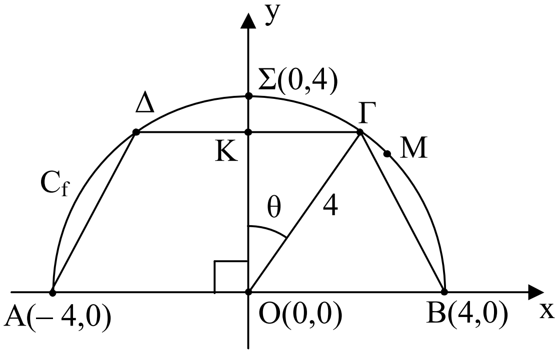


Α3. Θεωρία από το βιβλίο σελ. 128, 129.

Α4. αΛ, βΣ, γΛ, δΛ, εΣ.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Στο $(-4,4)$ έχουμε $f(x)\neq 0$ $(f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow 16-x^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4)$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-4,4)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0)=4>0$, άρα $f(x)>0$ στο $(-4,4)$.
Επομένως
$x^2+f^2(x)=16 \Leftrightarrow f^2(x)=16-x^2 \Leftrightarrow$
$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ στο $(-4,4)$.
Όμως οι τιμές $f(4)=0$ και $f(-4)=0$ περιλαμβάνονται στον παραπάνω τύπο, οπότε έχουμε $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ στο $[-4,4]$.



Β2. **α.** Επειδή $ΟΓ=4$, είναι $ΟΚ=4\cdot συνθ$ και $ΚΓ=4\cdot ημθ$. Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $Ε(θ)=\dfrac{(ΑΒ+ΔΓ)\cdot ΟΚ}{2}=\dfrac{(8+2\cdot 4ημθ)\cdot 4συνθ}{2}=16(ημθ+1)\cdot συνθ.$

β. Έχουμε $Ε'(θ)=16\big[(ημθ+1)\cdot συνθ\big]'=16\big[συνθ\cdot συνθ-(ημθ+1)\cdot ημθ\big]=$
$=16\big[συν^2θ-ημ^2θ-ημθ\big]=16\big[1-ημ^2θ-ημ^2θ-ημθ\big]=$

$$=16\left[-2\eta\mu^2\theta-\eta\mu^2\theta+1\right]=-32(\eta\mu\theta+1)\left(\eta\mu\theta-\frac{1}{2}\right).$$

Εξετάζω πότε $E'(\theta)>0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta-\frac{1}{2}<0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu\theta<\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta<\frac{\pi}{6}$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta)$	$+$	0	$-$
$E(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

Ο.Μ.

Επομένως για $\theta=\frac{\pi}{6}$ το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο.

Β4. Έστω $\theta(t)$ η γωνία $\Sigma\hat{O}\Gamma$ και $E(t)$ το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ είναι $\theta'(t)=0,5$ rad / sec.

Τότε $E(t)=16\left(\eta\mu\theta(t)+1\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta(t)$ (1). Ζητούμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $\theta(t_0)=\frac{\pi}{4}$.

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς t και έχουμε :

$$E'(t)=16\left[\sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta(t)-\left(\eta\mu\theta(t)+1\right)\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t)\right]=$$

$$=16\left[\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\theta'(t)-\left(\eta\mu^2\theta(t)+\eta\mu\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)\right]=$$

$$=16\cdot\theta'(t)\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)-\eta\mu^2\theta(t)-\eta\mu\theta(t)\right)=8\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)-\eta\mu^2\theta(t)-\eta\mu\theta(t)\right).$$

Για $t=t_0$ έχουμε $E'(t_0)=8\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)-\eta\mu\theta^2(t_0)-\eta\mu\theta(t_0)\right)=$

$$=8\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}-\eta\mu^2\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)=8\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4\sqrt{2}\ \text{τ.μ.μ./sec}.$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. **α.** Γνωρίζουμε ότι $\ln x\le x-1$ και ότι το «=» ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως η σχέση $\ln f(0)=f(0)-1$ ισχύει μόνο όταν $f(0)=1$.

β. Η $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\ln f(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)'$, οπότε

$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$. Για $x=0$ έχουμε $\ln f(0)=\frac{1}{2}\ln(0^2+1)+c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Leftrightarrow f(x)=\ln\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Γ2 Είναι $h(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\sqrt{x^2+1}$.

Άρα $h'(x)=\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{x^2+1}$.

Επίσης $h''(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1-x^2}{x^2+1}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h (x)	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε. $h(0)=0$

Σύνολο τιμών. Είναι

$$h(\mathbb{R}) = h\left((-\infty,0]\right) \cup h\left([0,+\infty)\right) = \left[h(0), \lim_{h\to-\infty} h(x)\right) \cup \left[h(0), \lim_{h\to+\infty} h(x)\right) =$$

$= \left[0,+\infty\right) \cup \left[0,+\infty\right) = \left[0,+\infty\right)$,

γιατί $\lim\limits_{h\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{h\to+\infty} h(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$h(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	
		Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Ασύμπτωτες. Π.Ο είναι το $\mathbb{R}$ και η h είναι συνεχής, άρα δεν έχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$, οπότε λ=0.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Επομένως δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο +∞.

Όμοια δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο –∞.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = h(x) - \frac{1}{2}x,\ x \in \mathbb{R}$, όπου

$$g'(x) = h'(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2\left(x^2+1\right)} = -\frac{(x-1)^2}{2\left(x^2+1\right)} < 0 \ \text{ στο } (-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Επίσης η g είναι συνεχής στο 1. Επομένως η g στο $\mathbb{R}$ είναι γν. φθίνουσα.

Τότε η $h(x) < \frac{1}{2}x \Leftrightarrow h(x) - \frac{1}{2}x < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow x > 0$, αφού η η g είναι γν. φθίνουσα.

Γ4. Είναι η $h(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, οπότε το $E = \int_0^2 h(x)\,dx$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^2 h(x)\,dx < 1 \Leftrightarrow \int_0^2 h(x)\,dx < \int_0^2 \frac{x}{2}dx \Leftrightarrow \int_0^2 \left[h(x) - \frac{x}{2}\right]dx < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_0^2 g(x)dx < 0$, που ισχύει γιατί $g(0) = 0$ και $g(x) < g(0) = 0$ στο (0,2], αφού η g είναι γν. φθίνουσα.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Είναι $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - \ln 2}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to0}\left[x(x+1)\right] = 0 \end{array}\right\}$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-\ln 2}{x(x+1)}\cdot\left[x(x+1)\right]\right] = -\dfrac{1}{2}\cdot 0$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to0}\left(f(x) - \ln 2\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \ln 2$. Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε έχουμε $f(0) = \ln 2$.

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - \ln 2}{x}$.

Είναι $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\ln 2}{x(x+1)}=-\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1\end{array}\right\}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-\ln 2}{x(x+1)}\cdot(x+1)\right]=-\dfrac{1}{2}\cdot 1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\ln 2}{x}=-\dfrac{1}{2}$, άρα $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\big(0,f(0)\big)$ είναι η :

$$y-f(0)=f'(0)\big(x-0\big) \Leftrightarrow y-\ln 2=-\frac{1}{2}\big(x-0\big) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\ln 2 .$$

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4F(x)+x^2-4f(0)x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)'}{\big(4F(x)+x^2-4f(0)x\big)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4f(x)+2x-4f(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2f(x)+x-2f(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2f(x)+x-2\ln 2} \quad (1).$$

Όμως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_f στο $A\big(0,f(0)\big)$, δηλ. $f(x)\geq -\dfrac{1}{2}x+\ln 2 \Leftrightarrow 2f(x)+x-2\ln 2\geq 0$ με το «=» να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $2f(x)+x-2\ln 2>0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (2). Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 0}\big(2f(x)+x-2f(0)\big)=2f(0)+0-2f(0)=0$ (3).

Από τις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2f(x)+x-2f(0)}=+\infty$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4F(x)+x^2-4f(0)x}=+\infty$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, ορισμένη και συνεχή στο (0,1), για την οποία $g(0)=f(0)-0=\ln 2>0$ και $g(1)=f(1)-1=\ln(e+1)-1-1=$ $=\ln(e+1)-2<0$ (γιατί $\ln(e+1)<2 \Leftrightarrow \ln(e+1)<\ln e^2 \Leftrightarrow e+1<e^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^2-e-1>0$ που ισχύει). Επομένως $g(0)\cdot g(1)<0$. Τότε από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g\big(x_0\big)=0$, το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η g είναι γν. φθίνουσα ($g'(x)=f'(x)-1=-\dfrac{1}{x^2+1}-1<0$).

Δ4. Θέτουμε $u=x-x_0$, οπότε $du=dx$. Για $x=x_0$ έχουμε $u=0$ και για $x=2x_0$ έχουμε $u=x_0$.

Επομένως $\displaystyle\int_{x_o}^{2x_o}x f'(x-x_o)\,dx=\int_0^{x_o}\big(u+x_0\big)f'(u)\,du=$

$$=\int_0^{x_o}u\cdot f'(u)\,du+\int_0^{x_o}x_0\cdot f'(u)\,du=\big[u\cdot f(u)\big]_0^{x_o}-\int_0^{x_o}\big(u\big)'\cdot f(u)\,du+x_0\int_0^{x_o}f'(u)\,du=$$

$$=x_o f(x_o)-\int_0^{x_o}f(u)\,du+x_0\big[f(u)\big]_0^{x_0}=x_o f(x_o)-\int_0^{x_o}f(u)\,du+x_0\big[f(x_0)-f(0)\big]=$$

$$=x_o{}^2-\int_0^{x_o}f(u)\,du+x_0 f(x_0)-x_0 f(0)=2x_o{}^2-x_0\cdot\ln 2-\int_0^{x_o}f(x)\,dx .$$