ΛΥΣΕΙΣ

ΣΤΟ

1ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

05/04/2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Ορισμός σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α3. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

Α4. α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Έστω συναρτήσεις:

$$\mathrm{f(x)}=\begin{cases} \mathrm{x}+1, & \mathrm{x}\ge 0 \\ -\mathrm{x}, & \mathrm{x}<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \mathrm{g(x)}=\begin{cases} -\mathrm{x}-1, & \mathrm{x}\ge 0 \\ \mathrm{x}, & \mathrm{x}<0 \end{cases}.$$

- Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-1\neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$
- Ωστόσο, η συνάρτηση $(\mathrm{f}+g)(x)=0,\ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.Έχουμε:

$$t_1=\frac{(KM)}{\mathrm{u}_1}=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2=\frac{(M\Sigma)}{\mathrm{u}_2}=\frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5},\ x\in(0,300)$$

Είναι:

$$T'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\frac{1}{5}$$

Η ρίζα της $T(x)=0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	**0** **75**	**300**
$T'(x)$	$-$	$+$
$\mathrm{T}(x)$	↘	↗

Δηλαδή η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=75\,ft$

Άρα όταν, $x=75\,ft$ τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\ln(e^x-1)-x$$

είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x-1>0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x>1\}=(0,+\infty)$$

Γ2. Η f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$, ώστε:

$$\ln(e^{x_0}-1)-x_0=0\Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1)=x_0\Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1)=\ln e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}-1=e^{x_0}\Leftrightarrow -1=0$$

, που είναι άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Δίνοντας μια τιμή στο $(0,+\infty)$, όπως π.χ. για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln(e-1)-1=\ln\frac{e-1}{e}<0\ \left(0<\frac{e-1}{e}<1\right).$$

Άρα $f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-1=\frac{1}{e^x-1}>0,\ \text{για κάθε. } x\in(0,+\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ4. Η f ως γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και «1-1». Άρα η f αντιστρέφεται: Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y=\ln(e^x-1)-x \Leftrightarrow y=\ln(e^x-1)-\ln e^x \Leftrightarrow y=\ln\frac{e^x-1}{e^x} \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x}=e^y \Leftrightarrow e^x-1=e^y e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x-e^y e^x=1 \Leftrightarrow e^x(1-e^y)=1 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{1-e^y} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{1-e^y}$$

Πρέπει: $1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$.

Άρα: $f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{1-e^x}$, $x<0$

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\Phi(x)=f(x)-h(x),\ x>0$$

Είναι:

$$\Phi'(x)=f'(x)-h'(x)=f'(x)+\frac{1}{x}>0,\ \text{για κάθε } x>0$$

Άρα η $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τομώς της είναι:

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)-h(x)\right)=-\infty-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-h(x)\right)=0-(-\infty)=+\infty$$

Επομένως υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$$

Γ6. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{f(2)}x=+\infty\ \ (f(1)<0,\ f(2)<0)$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'f(x)\mathrm{dx}=\left[xf(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)f(u)du=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}uf(u)du\ \ (1)$$ [1]

Επειδή ισχύει:

---

[1] Θέτω $u=\frac{\pi}{2}-x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du = 1 \ \ (2)$$

από τις σχέσεις (1) και(2) έχουμε:

$$1 = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Τώρα έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = 1$$

Άρα: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1 \Rightarrow 1 - f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 0$

Ακόμα, από τη σχέση $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για $x = 0$ έχουμε $f'(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f'(x)$ θέτοντας όπου x το $\frac{\pi}{2} - x$ έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x) \text{ και },$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2f(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) = 0$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι:

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow g(x) = f^2(0) + f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow g(x) = 1 \ \ (3)$$

Δ3. Εφόσον ισχύει $g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας τη σχέση προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

Αλλά από την (3) έχουμε $g(x) = 1$, και με την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$ στο 2ο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(u)du \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (3) έχουμε ότι:

$$f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)|\le 1 \Leftrightarrow -1\le f(x)\le 1 \quad (4)$$

Όμως στο ερώτημα Δ1 είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ (σχέση (1)), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει:

$$f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ ,$$

δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Δ5. Στο Δ1 αποδείξαμε ότι $f'(0)=1$ και $f(0)=0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

Λόγω της (4) παίρνουμε ότι $|f(e^x)|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{f(e^x)}{x}\le\frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x}=0$.

Επιστημονική ευθύνη: Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου ΠΕ03,

2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου