1ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

05/04/2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

γ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f\colon(\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β.

δ. Αν $\alpha > 1$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

ε. Αν η συνάρτηση $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

Α4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή:

«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f+g$ *συνεχής στο* $x_0\in\mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *και η* g *είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο* x_0*».*

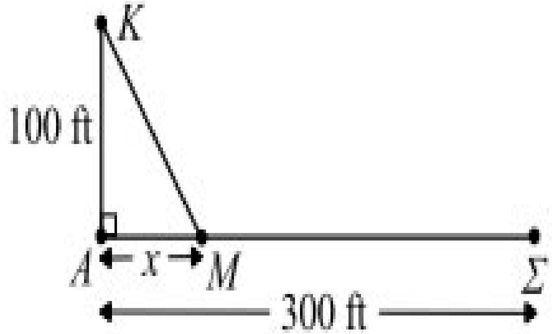
Μονάδες 2

β. Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



Β1. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο Τ:

$$T(x)=\frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$$

Μονάδες 10

Β2. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3+x+1,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $A(-1,\ -1)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Ίσχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right| \leq |x-y| \leq |f(x)-f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2χ3=6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi=0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=e^{x}(x^{2}+x+3)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$$g(2)+xg(x)-g(x+2)-(f(x)-3)^{2} \leq 0$$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(2)=0$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \to -\infty$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε σημείο B της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2, 0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB .

Μονάδες 7

Διάρκεια εξέτασης: **3 ώρες**

Επιστημονικά υπεύθυνος: Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου Ν. Δωδεκανήσου, 2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ Ν. Αγαίου.