1ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

05/04/2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α2. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

γ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f\colon(\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β.

δ. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

ε. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

Α4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή:

«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f+g$ *συνεχής στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *και η* g *είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο* x_0*».*

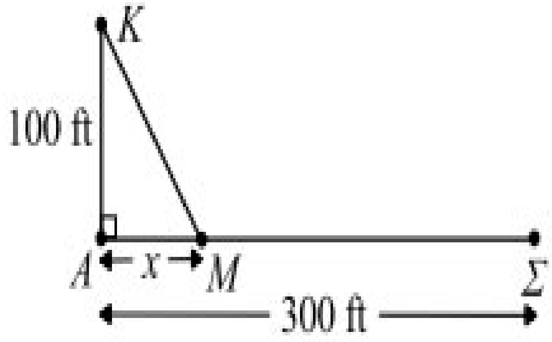
Μονάδες 2

β. Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



Β1. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο Τ:

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

Μονάδες 10

Β2. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) - x$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 4

Γ3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία**..**

Μονάδες 5

Γ4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν $h(x) = \ln\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = h(x_0)$$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1 \quad (2)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{x}$

Μονάδες 5

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Επιστημονικά υπεύθυνος: Καραγιάννης Ιωάννης,

ΣΕΕ Μαθηματικών 2ου ΠΕ.ΚΕ.Σ. Ν. Αιγαίου